Problemă propusă propusă pentru Clasa a XI-a_ Speranţe Râmnicene_2016

Fie $k \in N^*$ şi $tgx_k = \dfrac{\sqrt{4k-2\sqrt{4k^2-1}}}{1+\sqrt{4k^2-1}}$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Observăm că $tgx_k = \dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{1+\sqrt{2k+1}\cdot\sqrt{2k-1}}$. (2p)

Deci $x_k = arctg\sqrt{2k+1} - arctg\sqrt{2k-1}$. Obţinem că $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = arctg\sqrt{2n+1} - arctg1$. (2p)

(2p)

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$. (1p)